„Was wäre, wenn … ?“

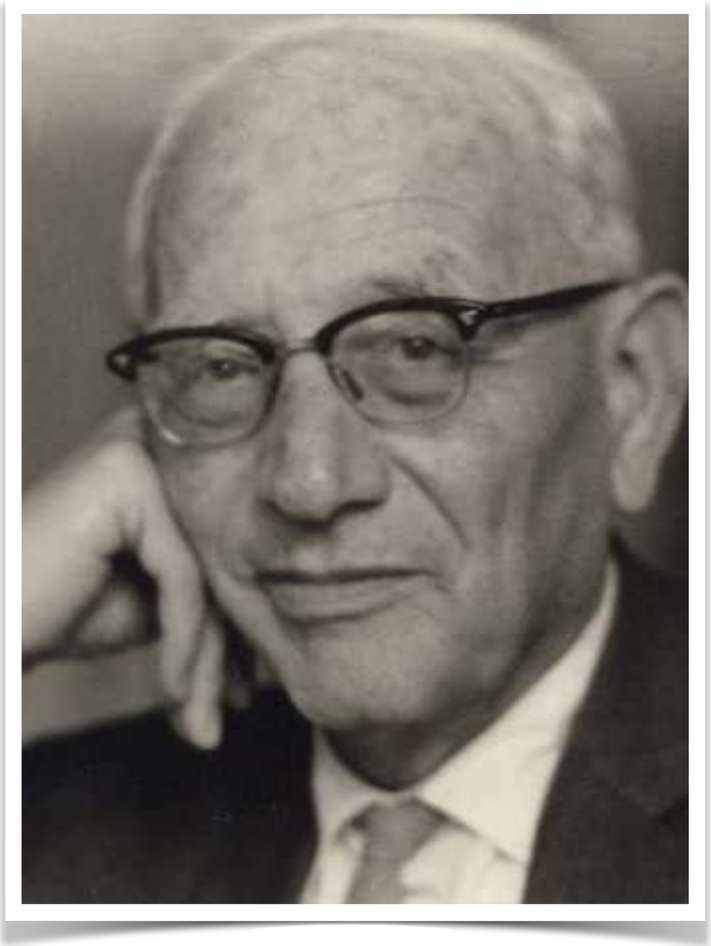
Vom Satz des Pythagoras zum Kosinussatz mit digitalen Werkzeugen

Lukas Baumanns[1] & Anna Schreck[2]

[1]Pädagogische Hochschule Freiburg, [2]Universität zu Köln

Fragen stellen … aber warum?

„The mathematical experience of the student is incomplete if he never had an opportunity to solve a *problem invented by himself*.“



George Pólya (1887–1985)

Fragen stellen … aber warum?

Blick in die Bildungsstandards

Anforderungsbereich I: Reproduzieren
Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
Dieser Anforderungsbereich umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Darstellen und Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren
Dieser Anforderungsbereich umfasst das selbstständige Auswählen geeigneter Arbeitstechniken und Verfahren sowie das Bearbeiten komplexer oder unbekannter Sachverhalte u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Fragen stellen … aber warum?

Blick in die Bildungsstandards

Mathematisch Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

Reproduzieren

- geben vertraute Argumentationen wieder (wie Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze),
- formulieren typische Fragen, die auf Argumentationen zielen („Wie verändert sich …?“, „Ist das immer so …?“),
- begründen angemessen auf Basis von Alltagswissen,

Zusammenhänge herstellen

- entwickeln und erläutern überschaubare mehrschrittige Argumentationen,
- erläutern Lösungswege und prüfen sie u. a. auf Konsistenz,
- bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes,
- erläutern mathematische Zusammenhänge, Ordnungen und logische Strukturen,

Verallgemeinern und Reflektieren

- entwickeln und erläutern komplexe Argumentationen,
- bewerten verschiedene Argumentationen (z. B. in Texten und Darstellungen aus digitalen Medien),
- stellen selbstständig Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und äußern begründet Vermutungen.

Fragen stellen … aber warum?

Blick in die Bildungsstandards

Probleme mathematisch lösen

Die Schülerinnen und Schüler

Reproduzieren

- geben Heurismen an (z. B. Skizze erstellen, systematisch probieren),
- lösen einfache Probleme mit bekannten Heurismen (z. B. systematisches Probieren),

Zusammenhänge herstellen

- formulieren Problemstellungen,
- wählen geeignete Heurismen zur Lösung entsprechender Probleme aus,
- überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen,

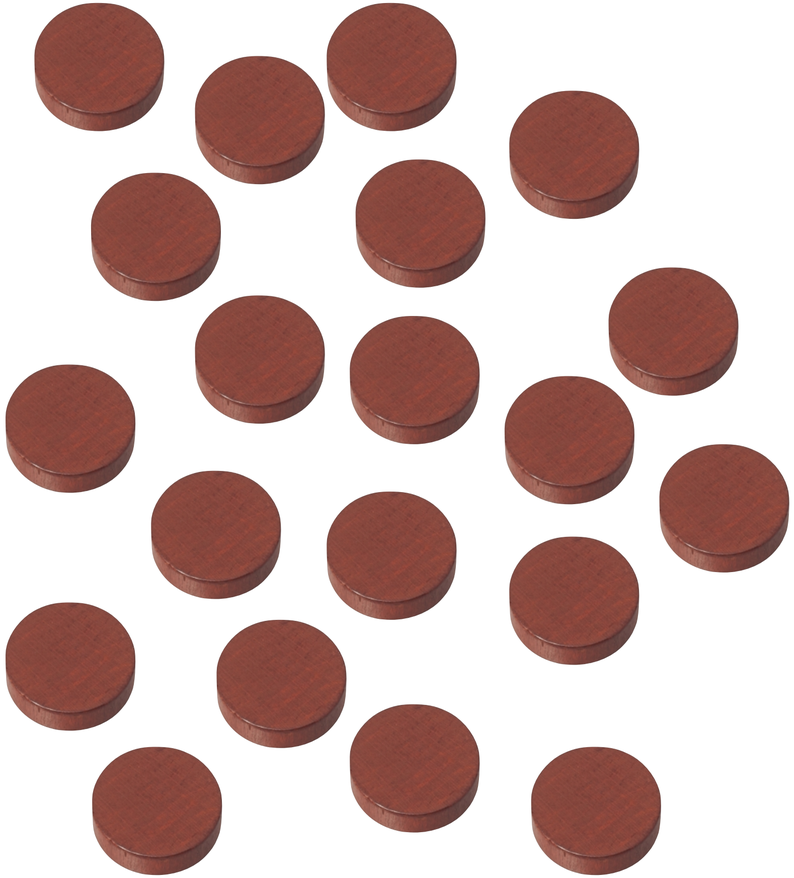
Verallgemeinern und Reflektieren

- lösen anspruchsvolle, komplexe oder offen formulierte Probleme,
- reflektieren das Finden von Lösungsideen, vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege.

Fragen stellen … aber wie?

Schupp (2002)

Fragen stellen ... aber wie?

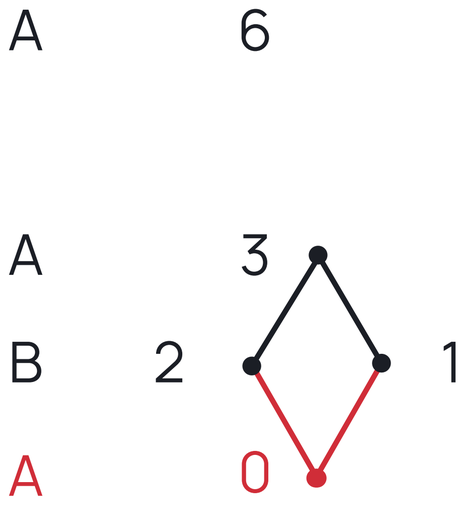


NIM-Spiel

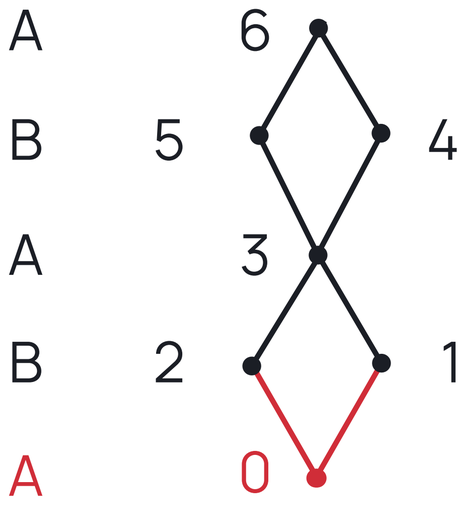
Auf dem Tisch liegen 20 Spielsteine. Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd einen oder zwei Steine weg. Es gewinnt, wer den letzten Zug macht. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?

Schupp (2002)

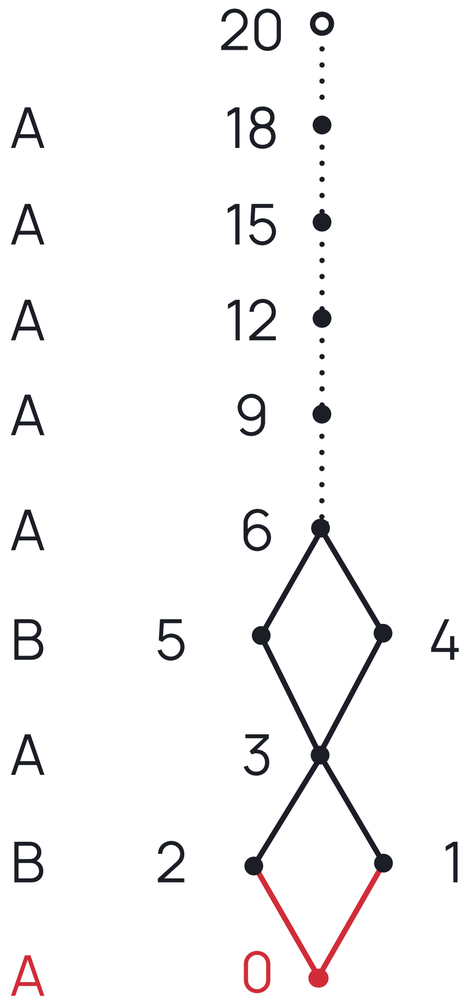
Fragen stellen … aber wie?



Fragen stellen … aber wie?

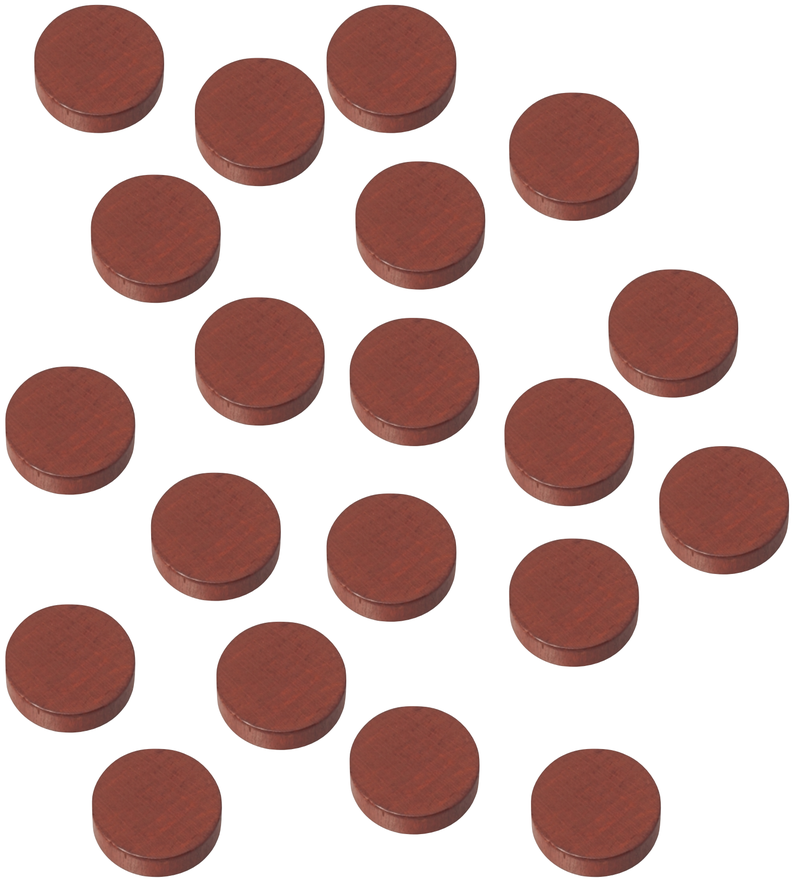


Fragen stellen … aber wie?



Schupp (2002)

Fragen stellen … aber wie?

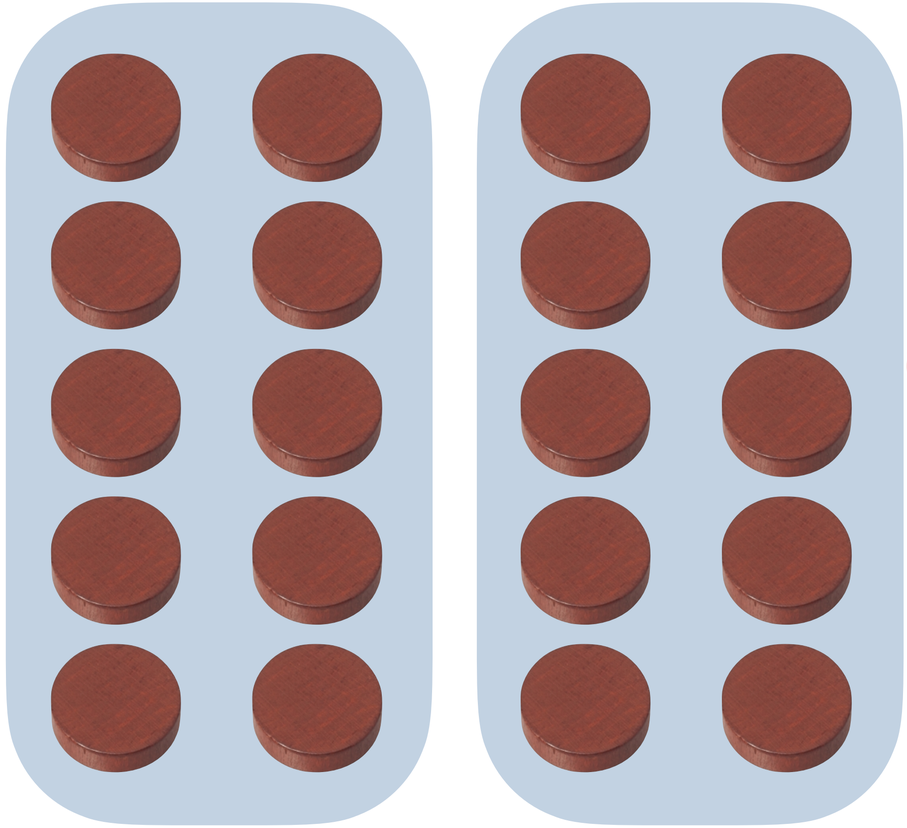


NIM-Spiel

Auf dem Tisch liegen 20 Spielsteine. Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd einen oder zwei Steine weg. Es gewinnt, wer den letzten Zug macht. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?

Schupp (2002)

Fragen stellen … aber wie?



NIM-Spiel

zwei Stapel mit

Auf dem Tisch liegen je zehn Steinen

Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd einen oder zwei Steine weg. Es gewinnt, wer den letzten Zug macht. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?

Sie dürfen in einem Zug aber nur Steine von einem Stapel entfernen

Schupp (2002)

Fragen stellen … aber warum?

Fragenstellen macht Spaß!

- Fragenstellen erhöht bei hinreichender Übung die Selbstwirksamkeitserwartungen der Schüler*innen
  (Chen et al., 2013; Liu et al., 2020; Nicolaou & Philippou, 2007)

- Probleme aufzustellen vermittelt in höherem Maße ein Gefühl von Autonomie und Kontrolle als Problemlösen
  (Voica et al., 2020)

Fragen stellen … aber wie?

Aufgabe
Problem
Satz
Situation

Digitale Werkzeuge
als Hilfsmittel

Ziel

Vorstellen einer Strategie zum eigenständigen Fragenstellen im MU

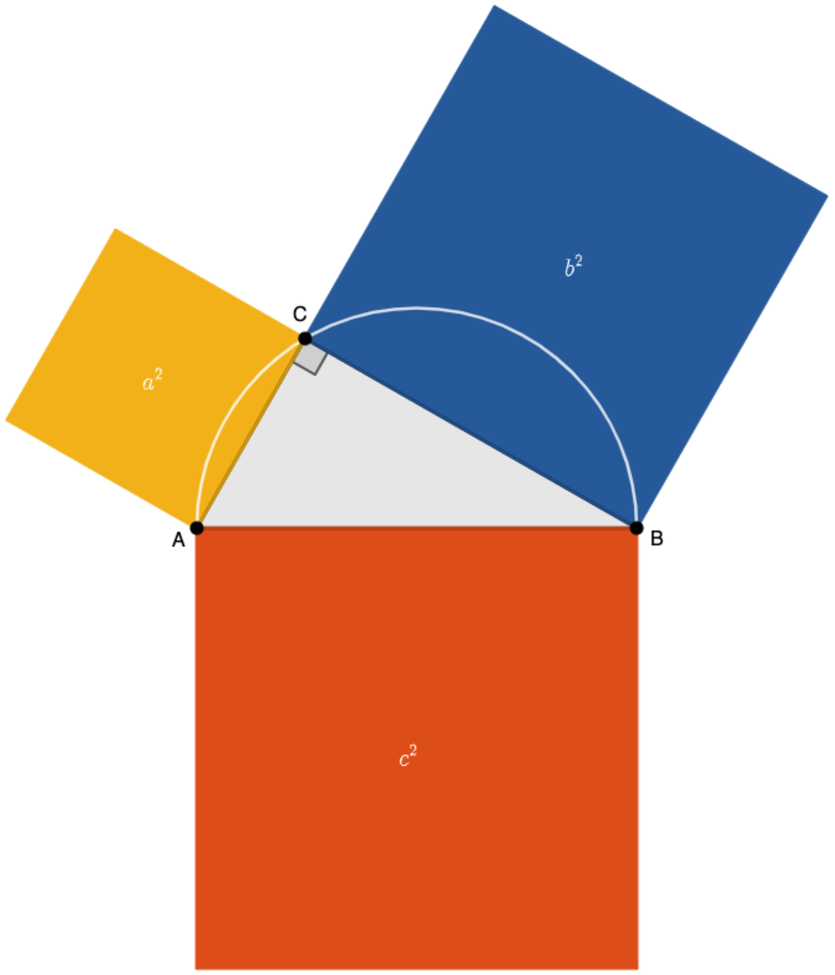
Theorie

„Was wäre, wenn … ?“

„What If Not … ?“
(Brown & Walter, 1985)

WWW-Strategie

1. Startpunkt wählen
2. Bedingungen auflisten
3. „Was wäre, wenn …“ fragen
4. Fragen analysieren



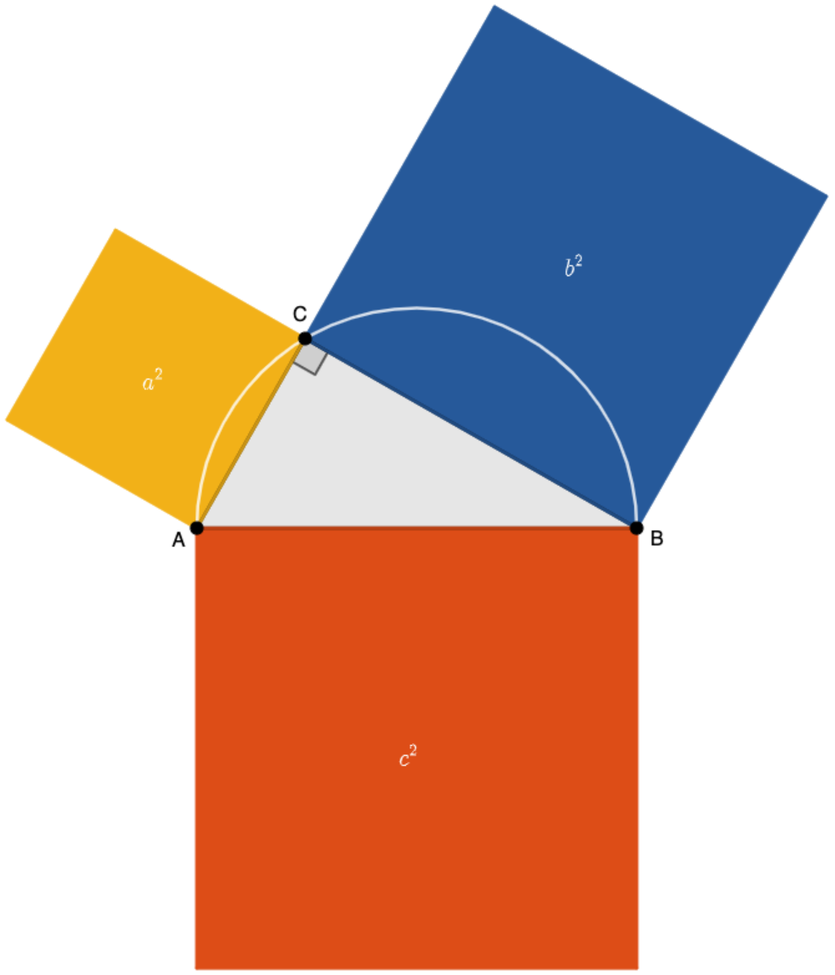
„Was wäre, wenn … ?“

1. Startpunkt wählen

Anwendung

Satz des Pythagoras

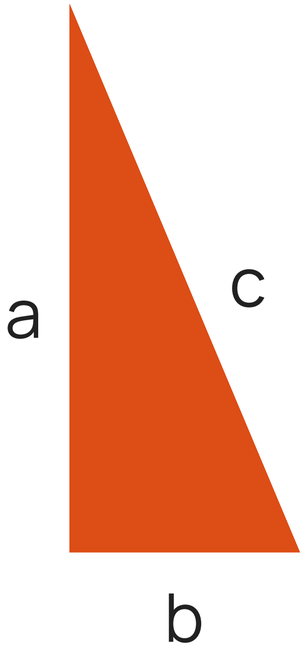
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.



„Was wäre, wenn … ?“

1. Startpunkt wählen

Anwendung



„Was wäre, wenn … ?“

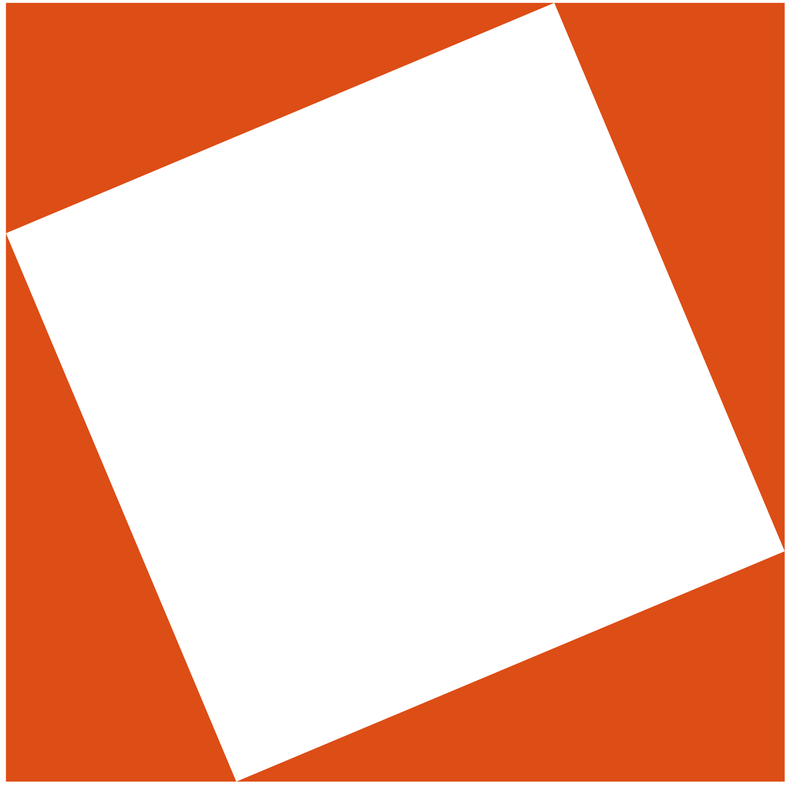
1. Startpunkt wählen

Anwendung

„Was wäre, wenn … ?“

1. Startpunkt wählen

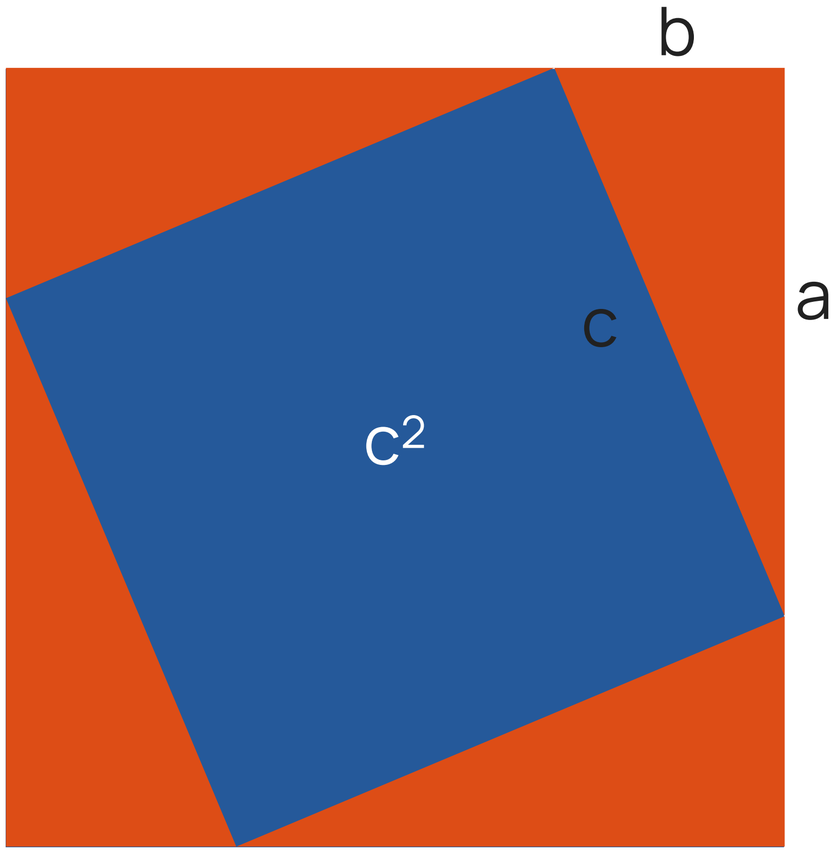
Anwendung



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

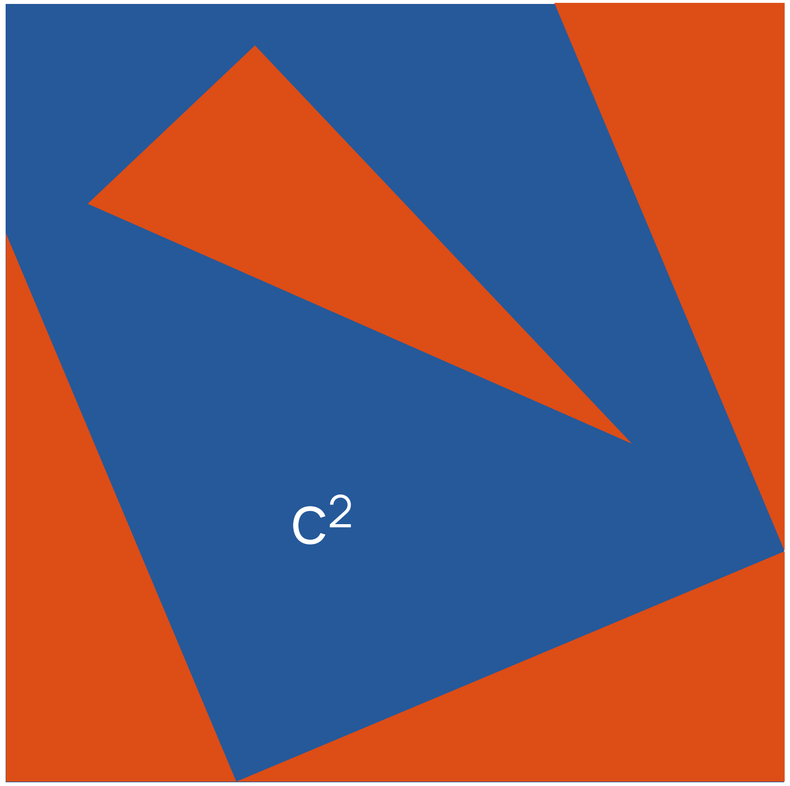
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

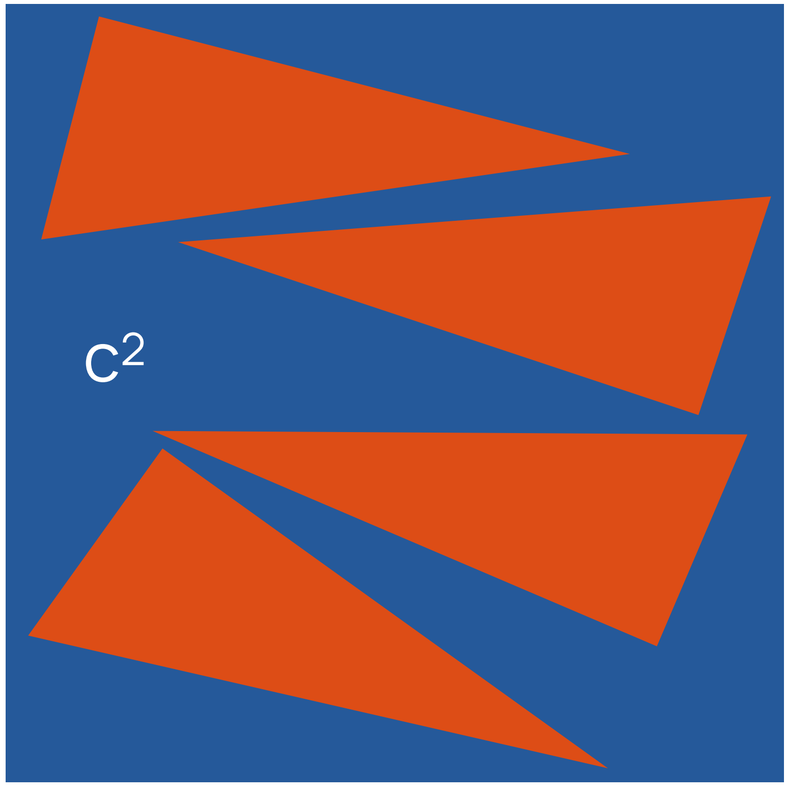
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

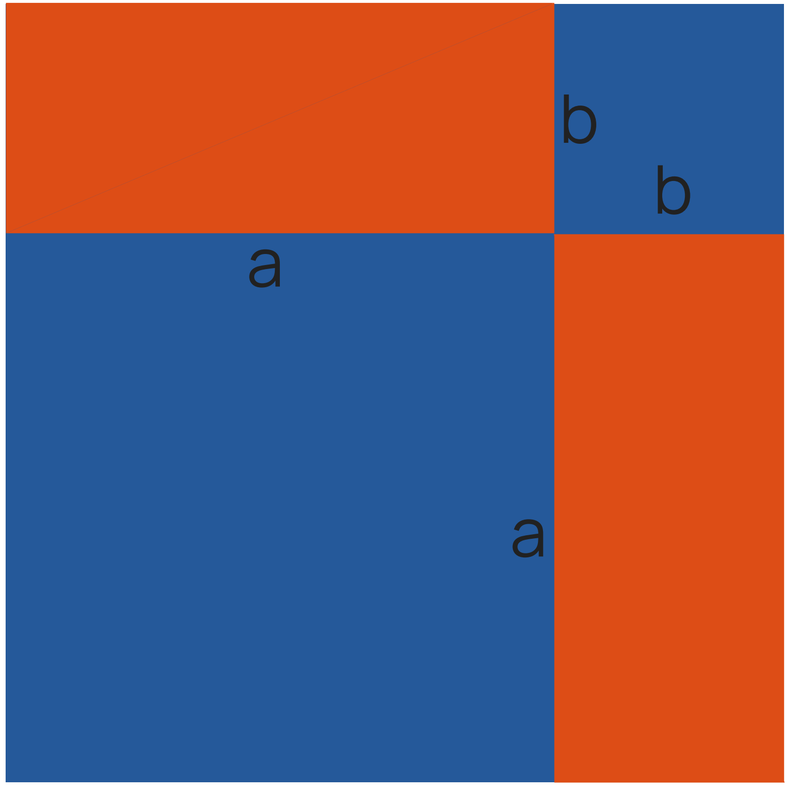
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

1. Startpunkt wählen

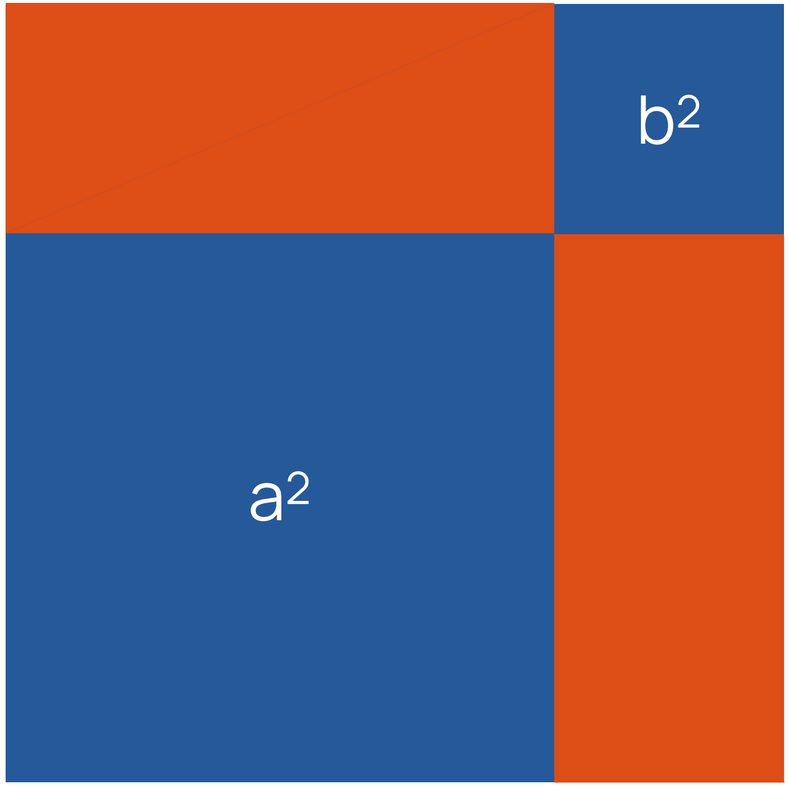


Polster (Mathologer, youtu.be/p-0SOWbzUYI)

„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

1. Startpunkt wählen

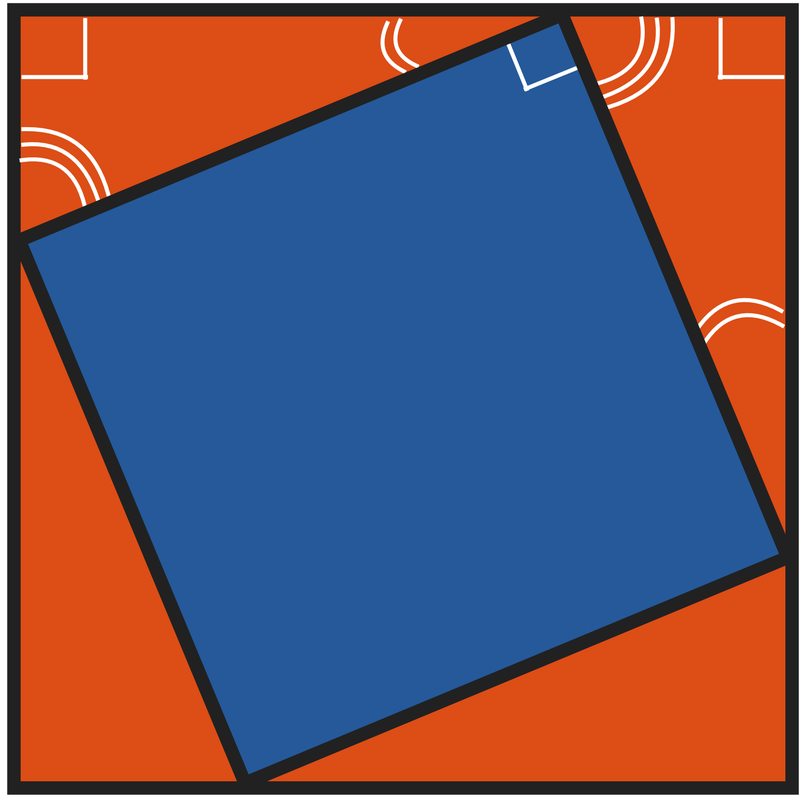


Polster (Mathologer, youtu.be/p-0SOWbzUYI)

„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

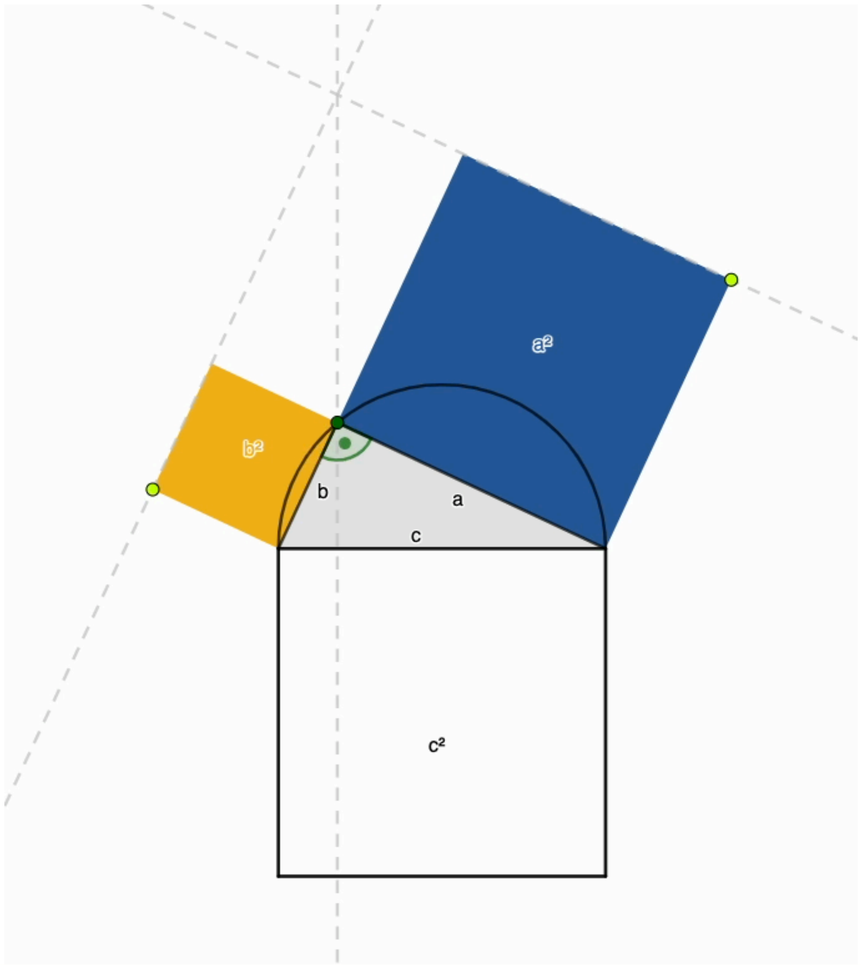
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

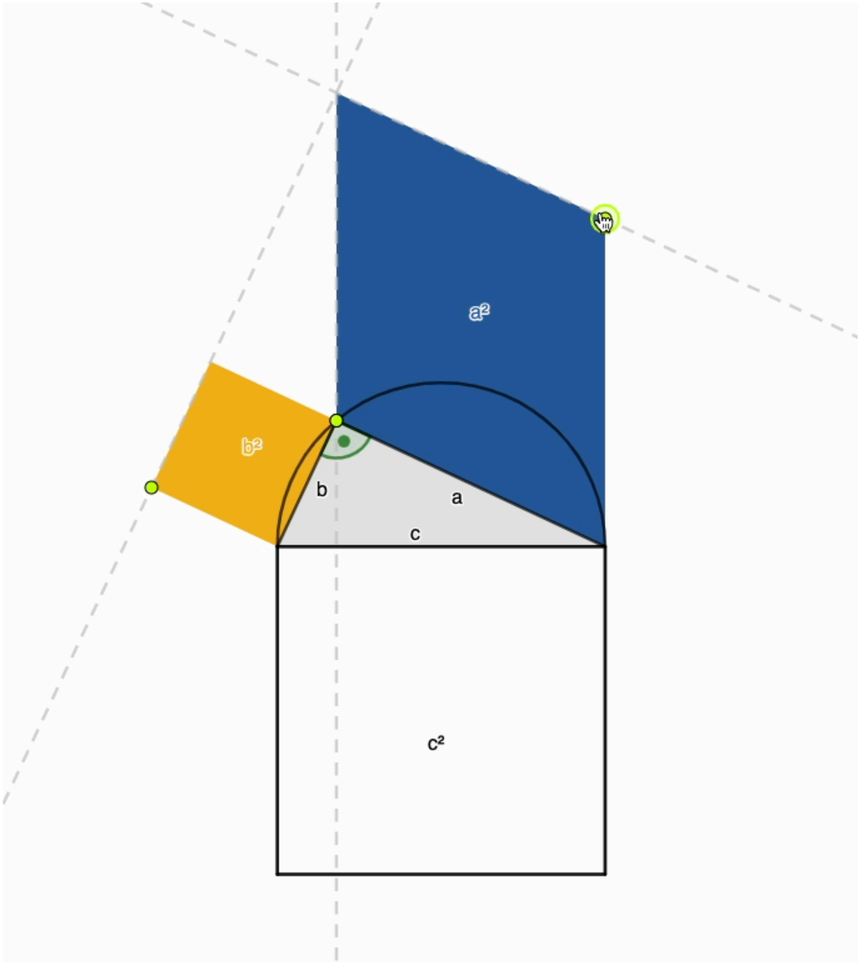
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

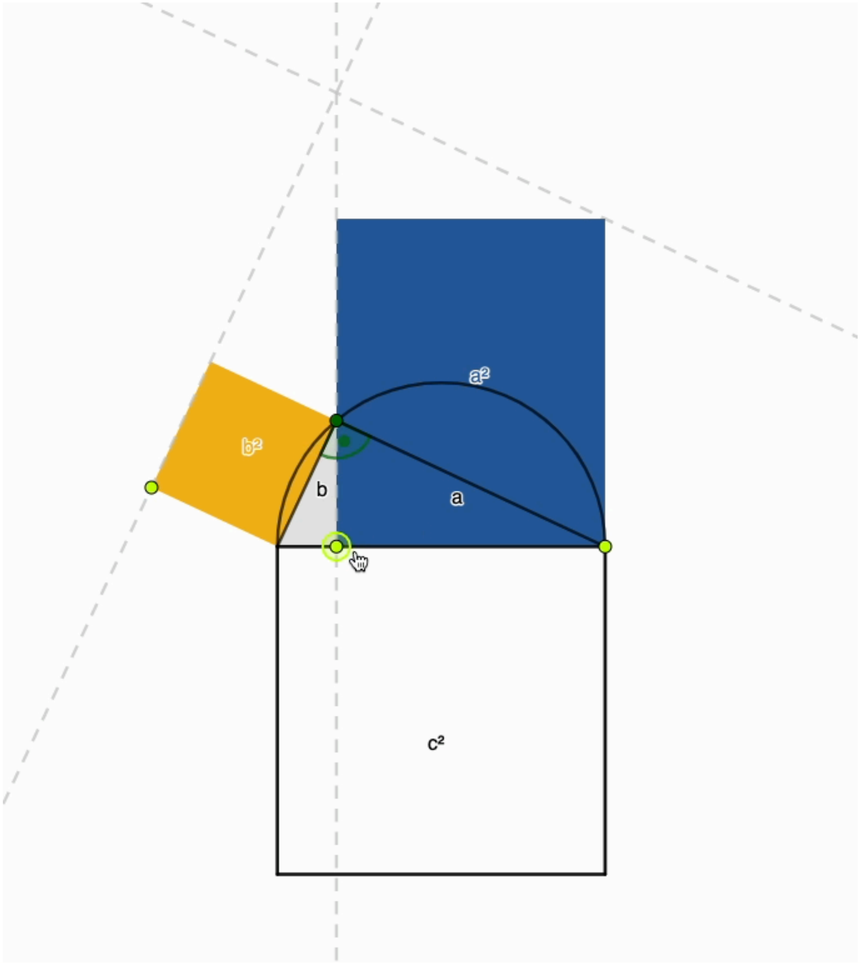
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

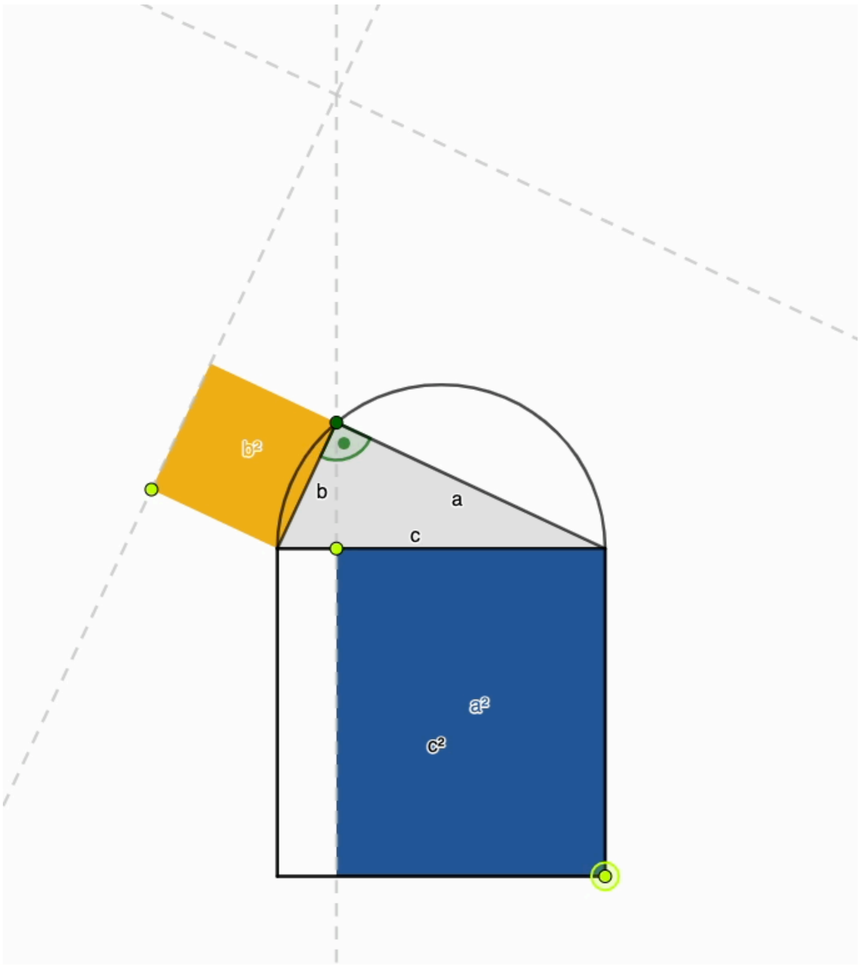
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

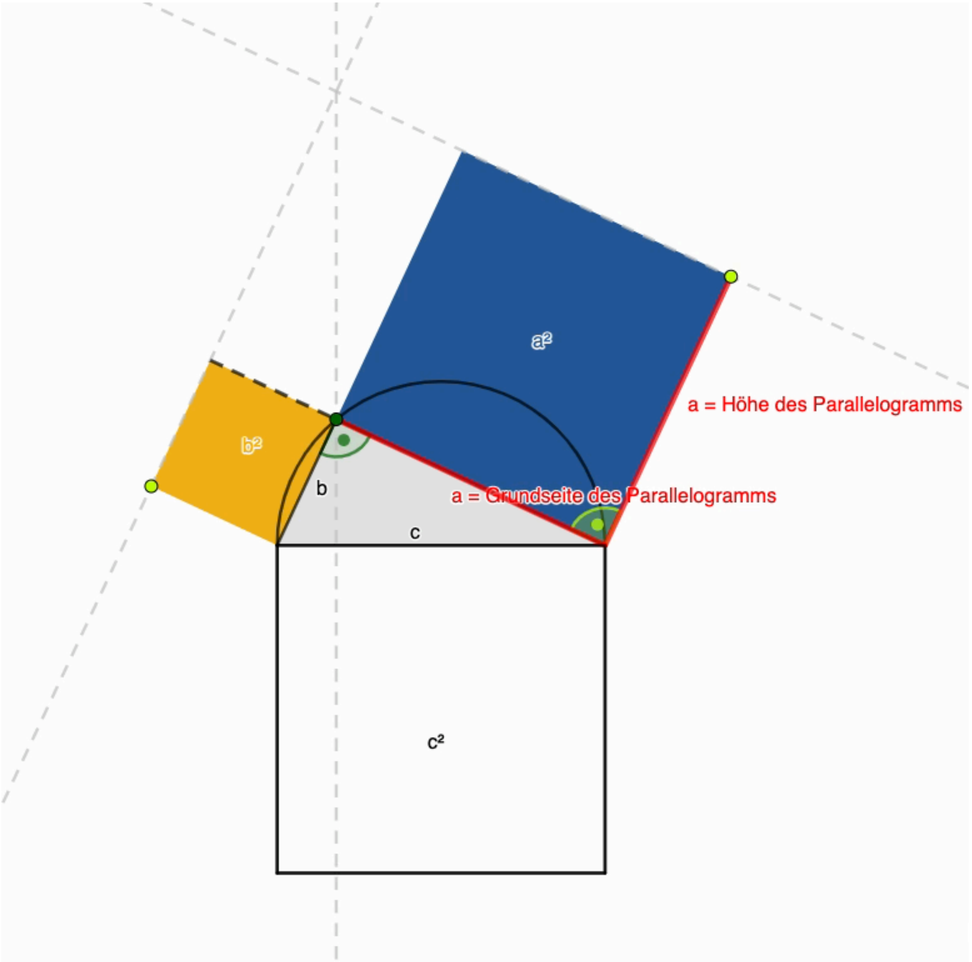
1. Startpunkt wählen



„Was wäre, wenn … ?“

Anwendung

1. Startpunkt wählen



Theorie

„Was wäre, wenn … ?“

WWW-Strategie

1. Startpunkt wählen
2. Bedingungen auflisten
3. „Was wäre, wenn …“ fragen
4. Fragen analysieren

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

b) Dreieck ist rechtwinklig

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

b) Dreieck ist rechtwinklig

c) Aussage über Flächeninhalte

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

b) Dreieck ist rechtwinklig

c) Aussage über Flächeninhalte

d) Flächeninhalte sind Quadrate

„Was wäre, wenn … ?“

2. Bedingungen auflisten

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

b) Dreieck ist rechtwinklig

c) Aussage über Flächeninhalte

d) Flächeninhalte sind Quadrate

e) Terme sind gleichwertig

Theorie

„Was wäre, wenn … ?“

WWW-Strategie

1. Startpunkt wählen
2. Bedingungen auflisten
3. „Was wäre, wenn …“ fragen
4. Fragen analysieren

„Was wäre, wenn … ?“

3. „Was wäre, wenn …“ fragen

Anwendung

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c* ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Aussage über ein Dreieck

b) Dreieck ist rechtwinklig

c) Aussage über Flächeninhalte

d) Flächeninhalte sind Quadrate

e) Terme sind gleichwertig

Was wäre, wenn …

… das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

… die Flächeninhalte gleichseitige Dreiecke, Fünfecke oder Halbkreise wären?

… $a^2 + b^2 > c^2$ oder $a^2 + b^2 < c^2$ gelten würde?

… es keine Aussage über ein Dreieck, sondern ein Viereck wäre?

Theorie

„Was wäre, wenn … ?“

WWW-Strategie

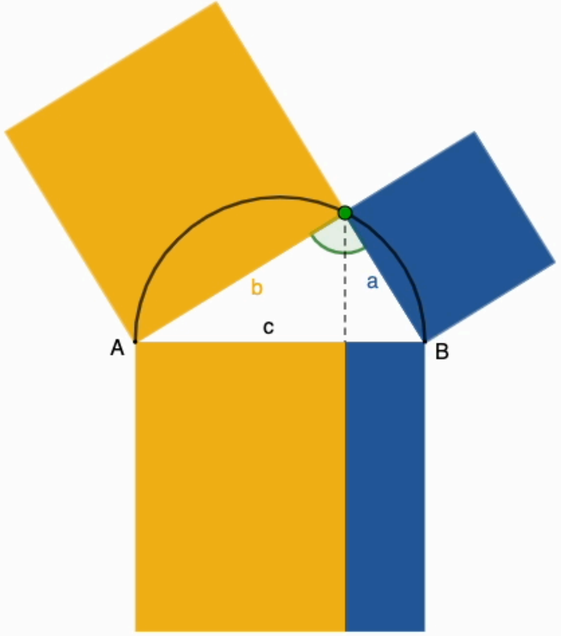
1. Startpunkt wählen
2. Bedingungen auflisten
3. „Was wäre, wenn …“ fragen
4. Fragen analysieren

„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … $a^2 + b^2 > c^2$ oder $a^2 + b^2 < c^2$ gelten würde?

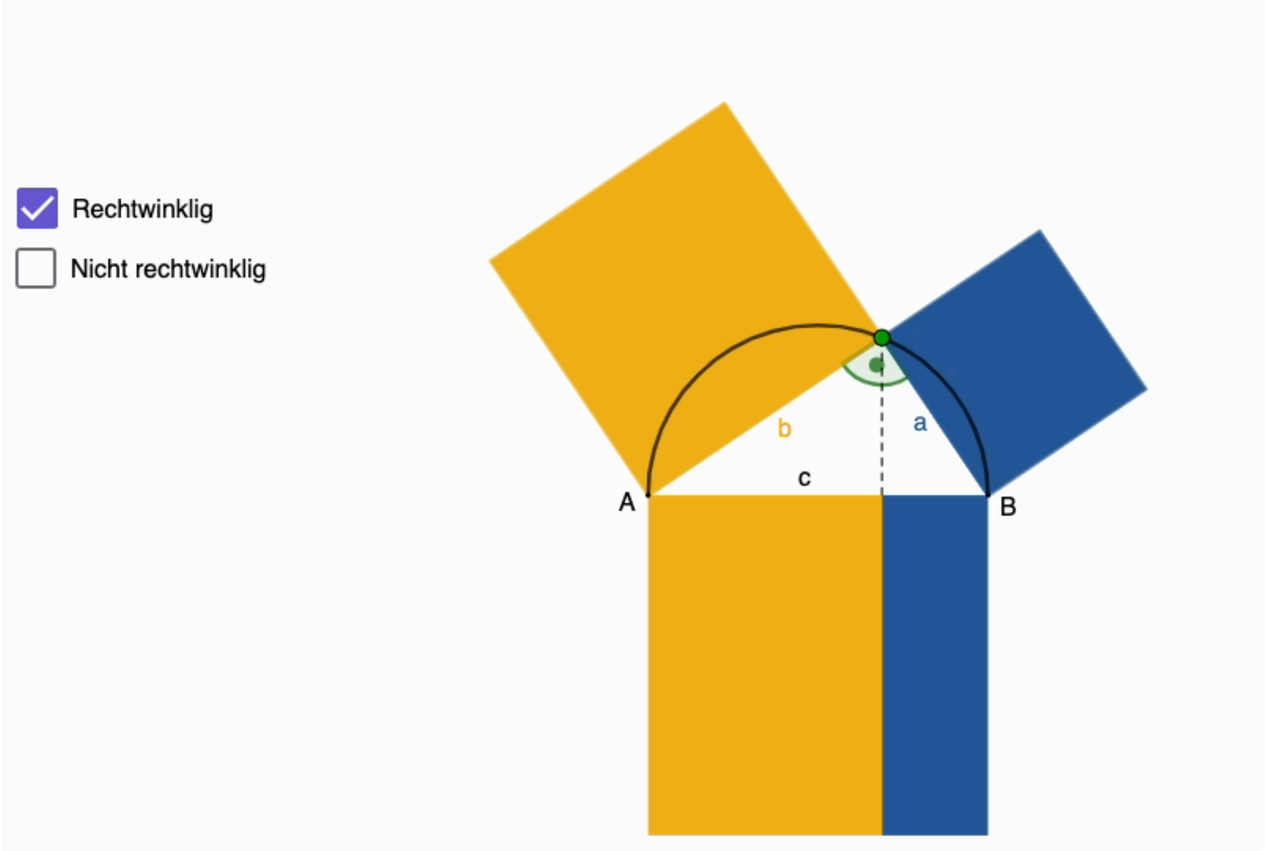


„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?



„Was wäre, wenn … ?“

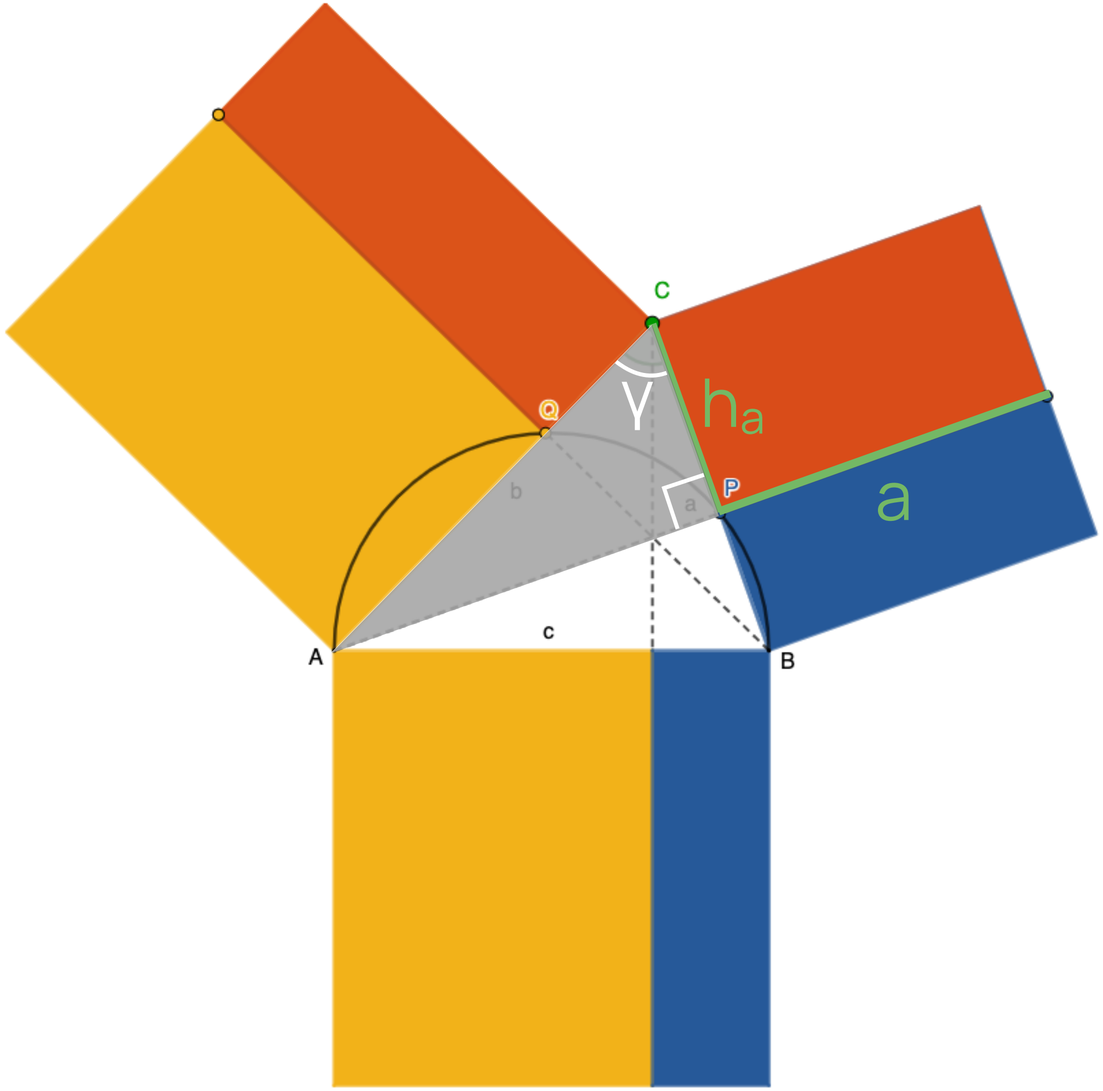
4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

$$a^2 + b^2 - x = c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_a}{b}$$



„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

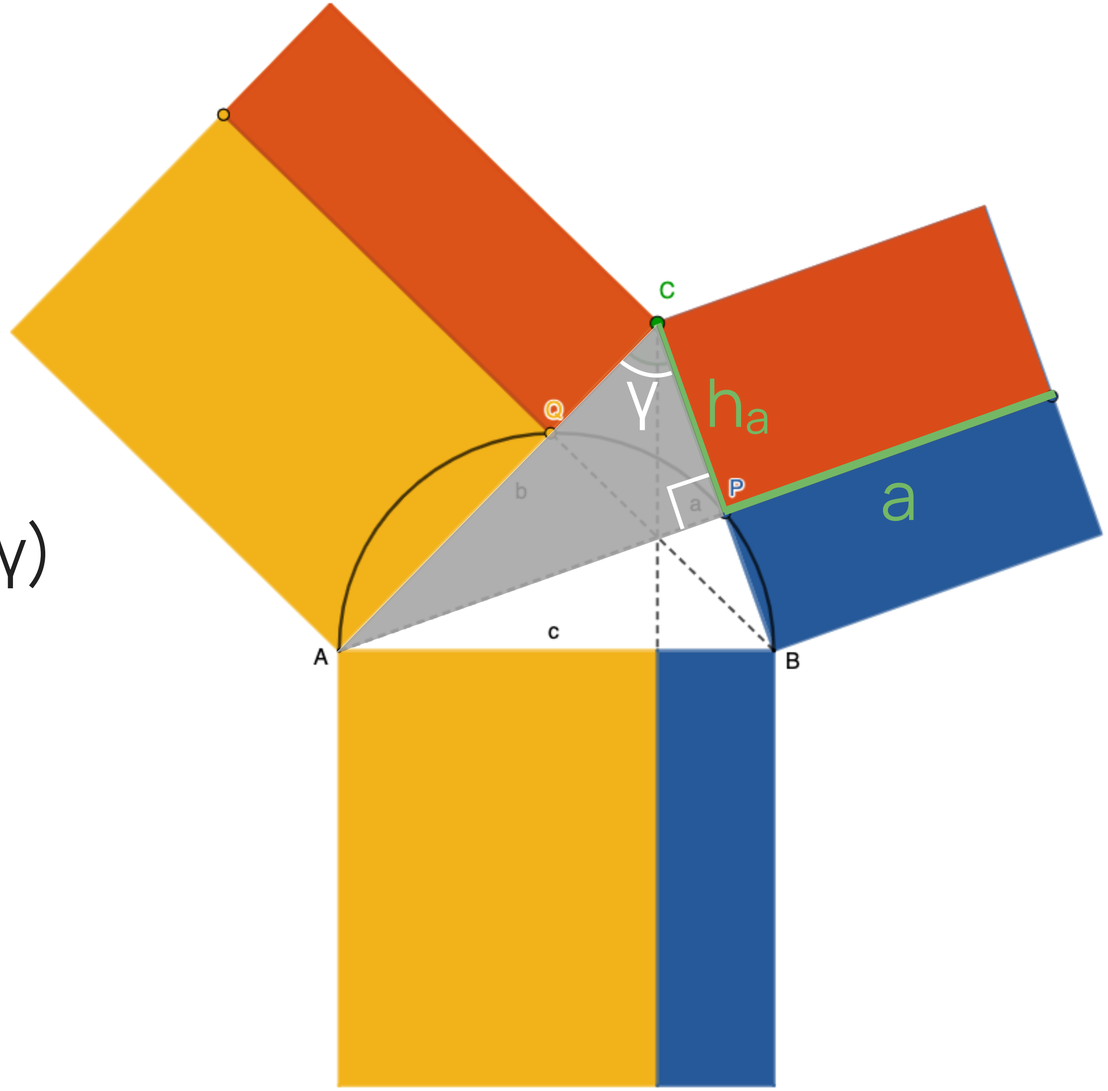
Anwendung

Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

$$a^2 + b^2 - x = c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h_a = b \cdot \cos(\gamma)$$

$$a \cdot h_a = ab \cdot \cos(\gamma)$$



„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

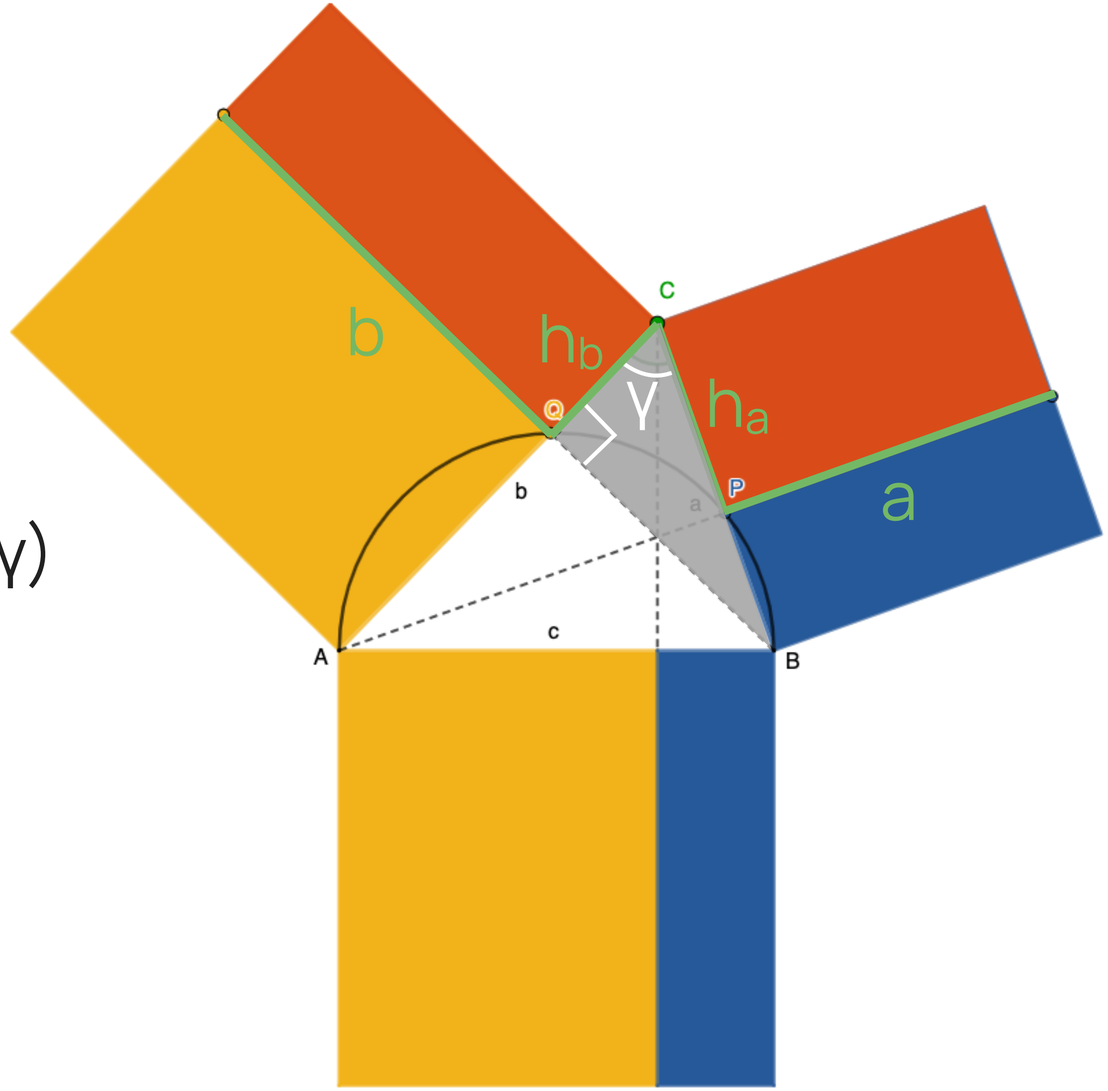
Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

$$a^2 + b^2 - x = c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h_a = b \cdot \cos(\gamma)$$

$$a \cdot h_a = ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_b}{a}$$



„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

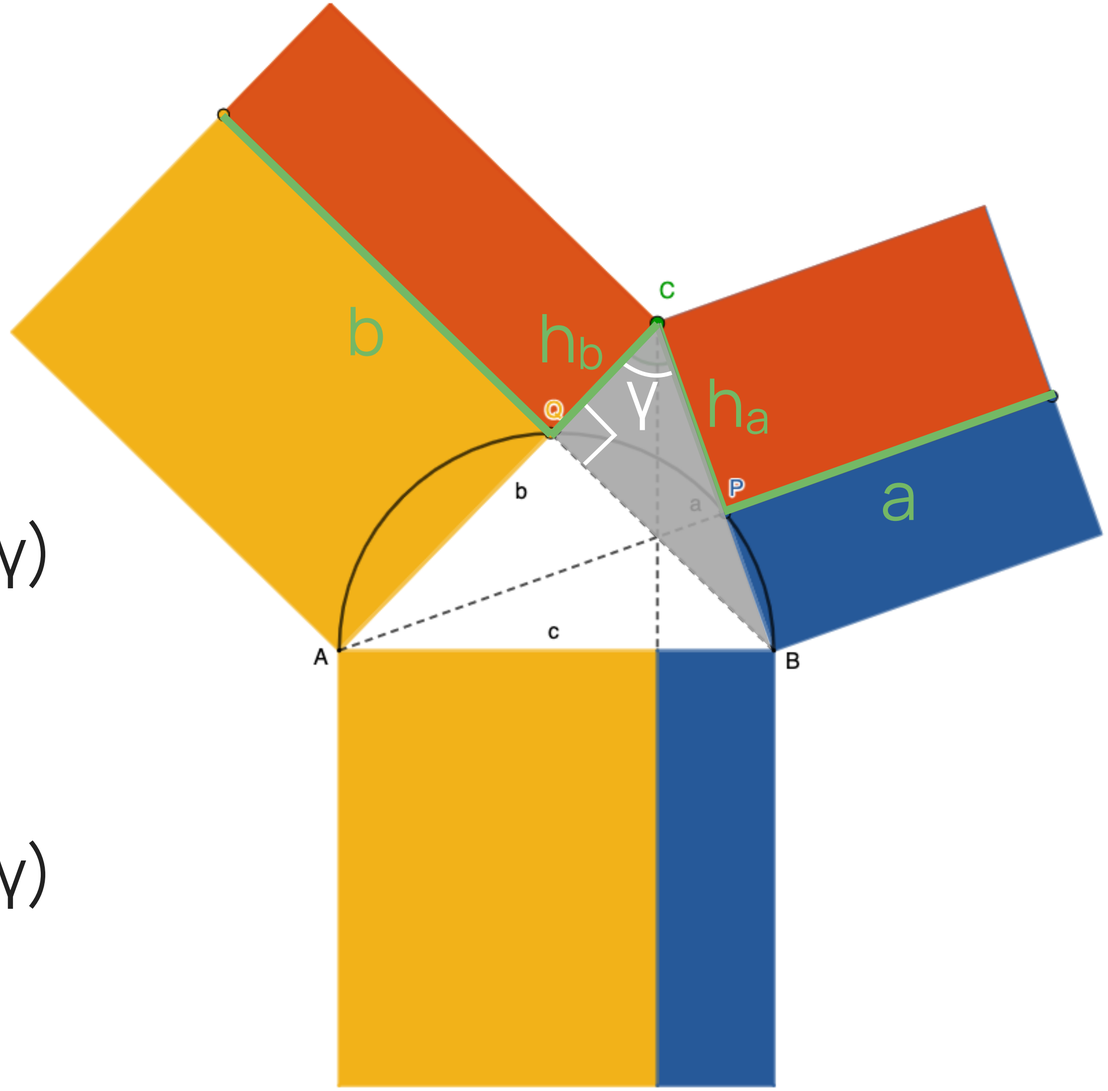
$$a^2 + b^2 - x = c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h_a = b \cdot \cos(\gamma)$$

$$a \cdot h_a = ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{h_b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h_b = a \cdot \cos(\gamma)$$

$$b \cdot h_b = ba \cdot \cos(\gamma)$$



„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

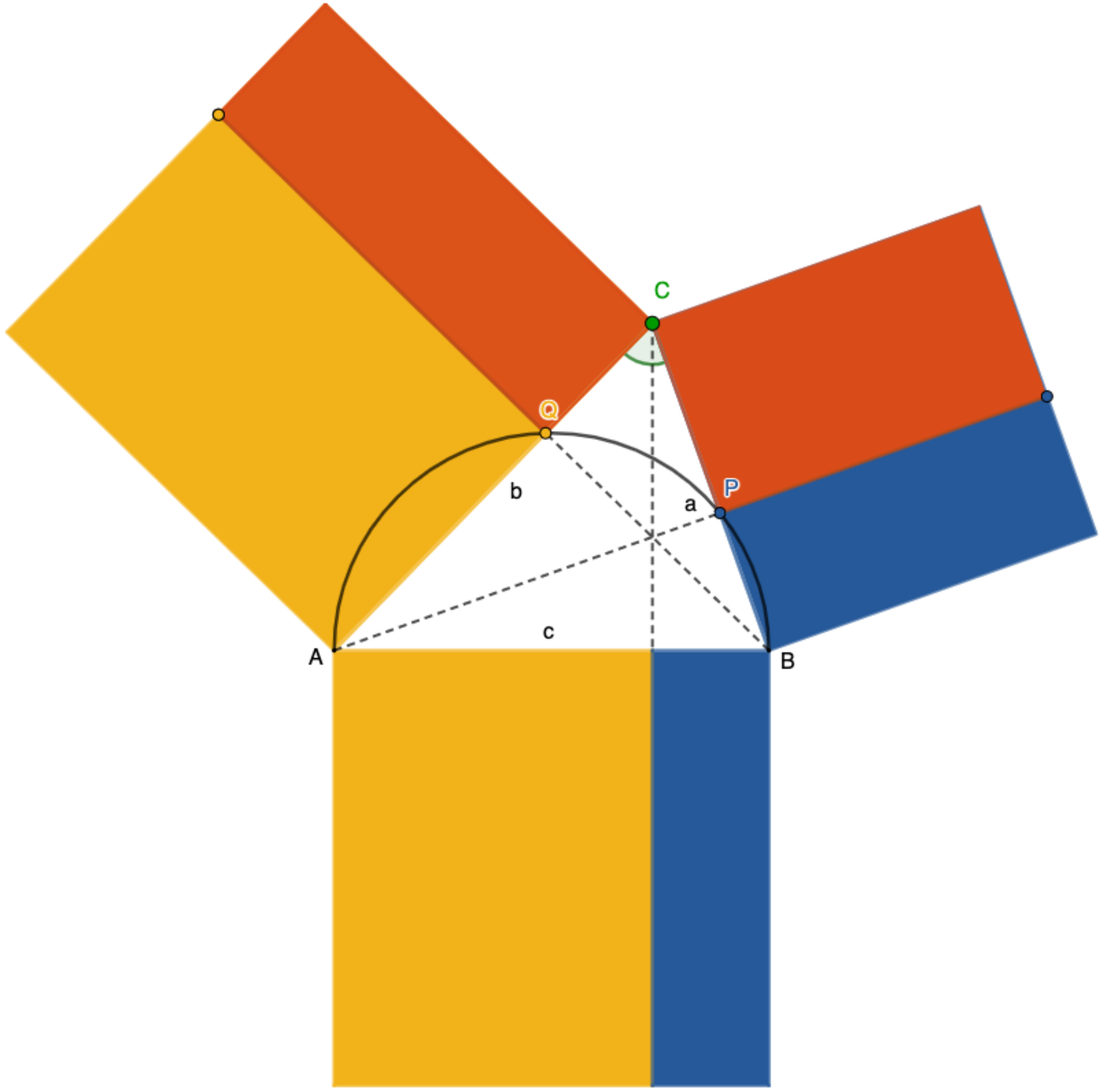
Was wäre, wenn … das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig wäre?

$$a^2 + b^2 - x = c^2$$

$$x = ab \cdot \cos(\gamma) + ba \cdot \cos(\gamma)$$
$$= 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Kosinussatz

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) = c^2$$



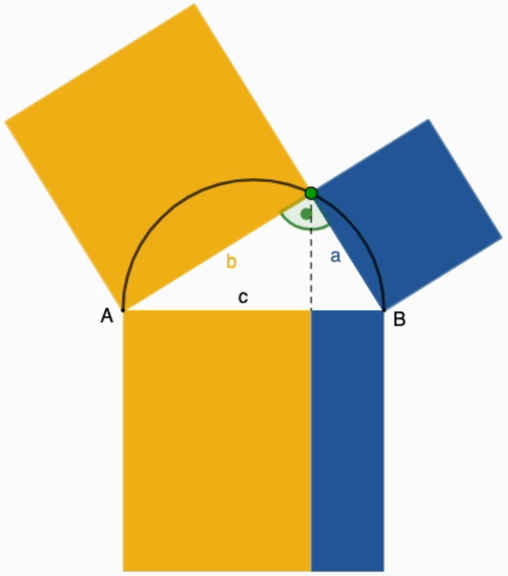
„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … die Flächeninhalte gleichseitige Dreiecke, regelmäßige Fünfecke oder Halbkreise wären?

- [ ] Gleichseitige Dreiecke
- [ ] Regelmäßige Fünfecke
- [ ] Halbkreise

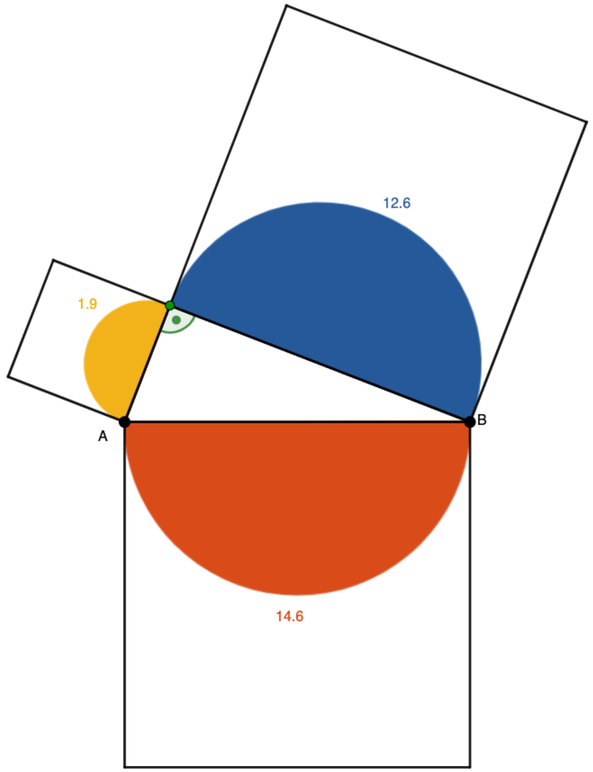


„Was wäre, wenn … ?“

4. Fragen analysieren

Anwendung

Was wäre, wenn … die Flächeninhalte gleichseitige Dreiecke, regelmäßige Fünfecke oder Halbkreise wären?



Mindmap

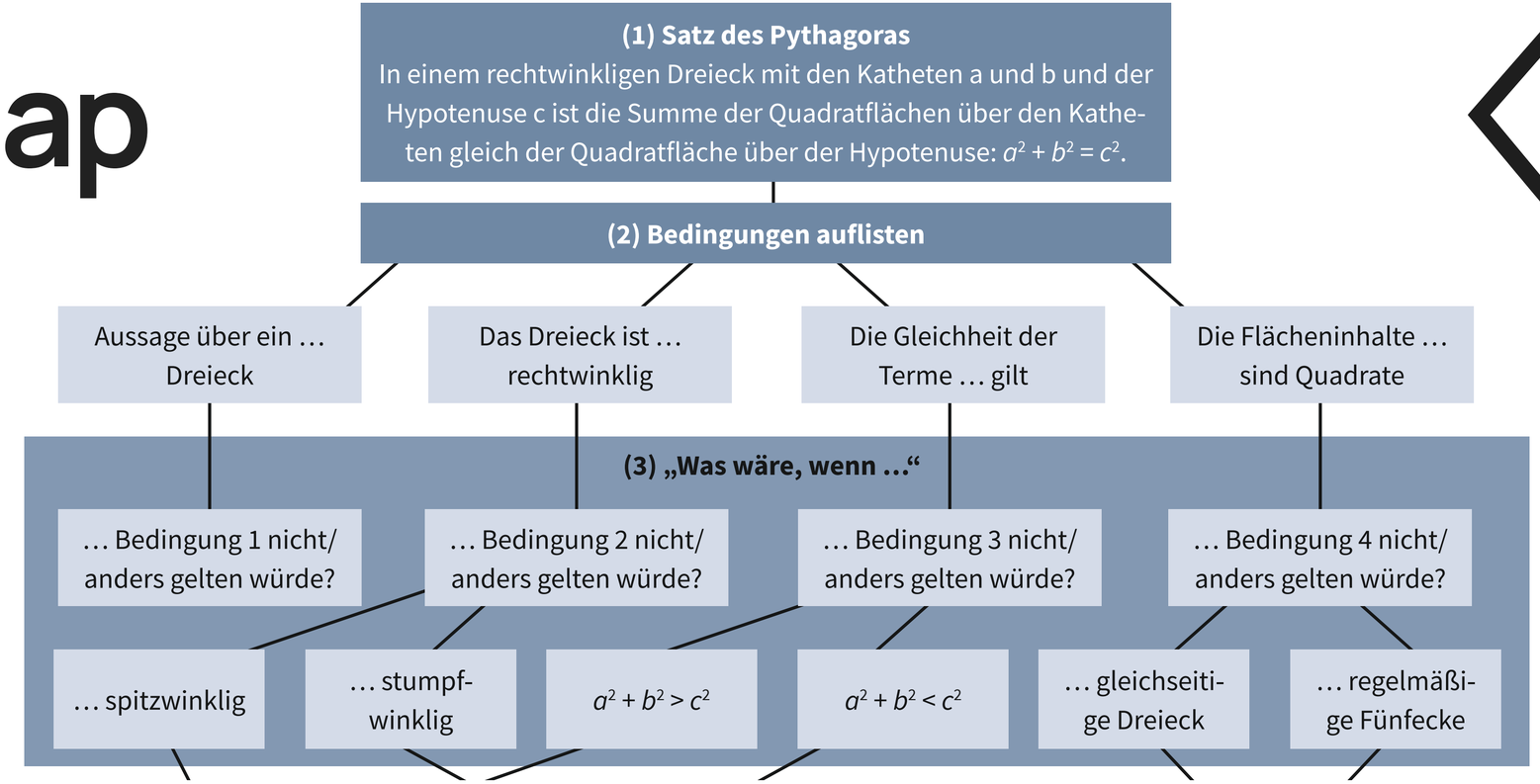
(1) Satz des Pythagoras
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

(2) Bedingungen auflisten

- Aussage über ein … Dreieck
- Das Dreieck ist … rechtwinklig
- Die Gleichheit der Terme … gilt
- Die Flächeninhalte … sind Quadrate

Bemerkung

Mindmap



Bemerkung

Mindmap

(1) Satz des Pythagoras
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c ist die Summe der Quadratflächen über den Katheten gleich der Quadratfläche über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

(2) Bedingungen auflisten

- Aussage über ein … Dreieck
- Das Dreieck ist … rechtwinklig
- Die Gleichheit der Terme … gilt
- Die Flächeninhalte … sind Quadrate

(3) „Was wäre, wenn …“

- … Bedingung 1 nicht/ anders gelten würde?
  - … spitzwinklig
  - … stumpf-winklig
- … Bedingung 2 nicht/ anders gelten würde?
  - … stumpf-winklig
  - $a^2 + b^2 > c^2$
- … Bedingung 3 nicht/ anders gelten würde?
  - $a^2 + b^2 > c^2$
  - $a^2 + b^2 < c^2$
- … Bedingung 4 nicht/ anders gelten würde?
  - … gleichseitige Dreieck
  - … regelmäßige Fünfecke

(4) Fragen analysieren

- Die Dynamisierung zeigt: Wird der rechte Winkel, verkleinert, vergrößern sich die Katheten und damit deren Quadratflächen.
- Umgekehrt gilt auch: Wird der rechte Winkel vergrößert, verkleinern sich die Katheten und damit deren Quadratflächen.
- Die Dynamisierung zeigt: Die Aussage des Satzes von Pythagoras gilt für beide regelmäßige Figuren. Gilt er vielleicht für alle ähnlichen Figuren über den Dreiecksseiten? Kann ich das begründen?

Die Bedingungen 2 und 3 hängen also zusammen!
Wie groß ist der „Fehler“? Kann ich diesen konkret angeben und so Gleichwertige Terme aufstellen (Fehlerkorrektur)?

Bemerkung

ChatGPT

LU

Hilf mir beim Aufstellen neuer mathematischer Aufgaben. Folgende Schritte sollen dabei nach und nach bearbeitet werden:

1. Festlegen einer Startaufgabe. Skizzieren einer Lösung dieser Aufgabe
2. Bedingungen der Startaufgabe auflisten.
3. Bei jeder Bedingung fragen, was wäre, wenn diese Bedingung nicht oder anders gelten würde.
4. Die neuen Aufgaben aus Schritt 3 analysieren.

Warte im ganzen Chat bei jedem Schritt immer meinen Input ab. Mache keinen Schritt selbstständig, sondern hilf mir dabei, die Schritte eigenständig zu vollziehen.

Bemerkung

chat.openai.com/share/99c6f006-bb44-4617-9b9e-edc1caba0bf9

Abschließende Bemerkung

Was kann die Frage „Was wäre, wenn …?“ bewirken?

- Die Schüler*innen lernen eine **neugierige und aktive Lernhaltung** einzunehmen. Die Lerntechnik, Wissen durch systematisches Fragen zu erschließen und so tiefergehend zu durchdringen, ist auch auf andere Lernsituationen und Lerninhalte übertragbar.
- Das Stellen von eigenen Fragen weckt das **persönliche Interesse**, lässt die **Lerninhalte bedeutend** werden und **steigert die Lernmotivation**.
- Das eigenständige Aufdecken neuer Zusammenhänge lässt die Schüler*innen die **Rolle von forschenden Mathematiker*innen** einnehmen. Sie erhalten einen Einblick in **authentisches Mathematikbetreiben**.
- **Selbstbestimmtes Lernen stärkt das Schüler*innen-Ich** und ermutigt sie, **Verantwortung für den eigenen Lernprozess** zu übernehmen.

Bemerkung

Erkenntnisse aus der Forschung

Fragenstellen …

… erhöht die Mathematikleistungen, die Problemlösekompetenz, und die Einstellung zur Mathematik (Rosli et al., 2014)

… fördert kreatives Denken im Mathematikunterricht (Matsko & Thomas, 2015)

… kann bei Lehrkräften die Sensibilität für das mathematische Denken der Schüler*innen stärken (Xu, Cai, Liu, & Hwang, 2020)

… muss geübt werden, damit die Selbstwirksamkeitserwartungen der Schüler*innen davon profitieren
(Chen et al., 2013; Liu et al., 2020; Nicolaou & Philippou, 2007)

Bemerkung

… macht einfach Spaß!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Folien und Materialien zum Download

„Was wäre, wenn …“

Vom Satz des Pythagoras zum Kosinussatz mit digitalen Werkzeugen

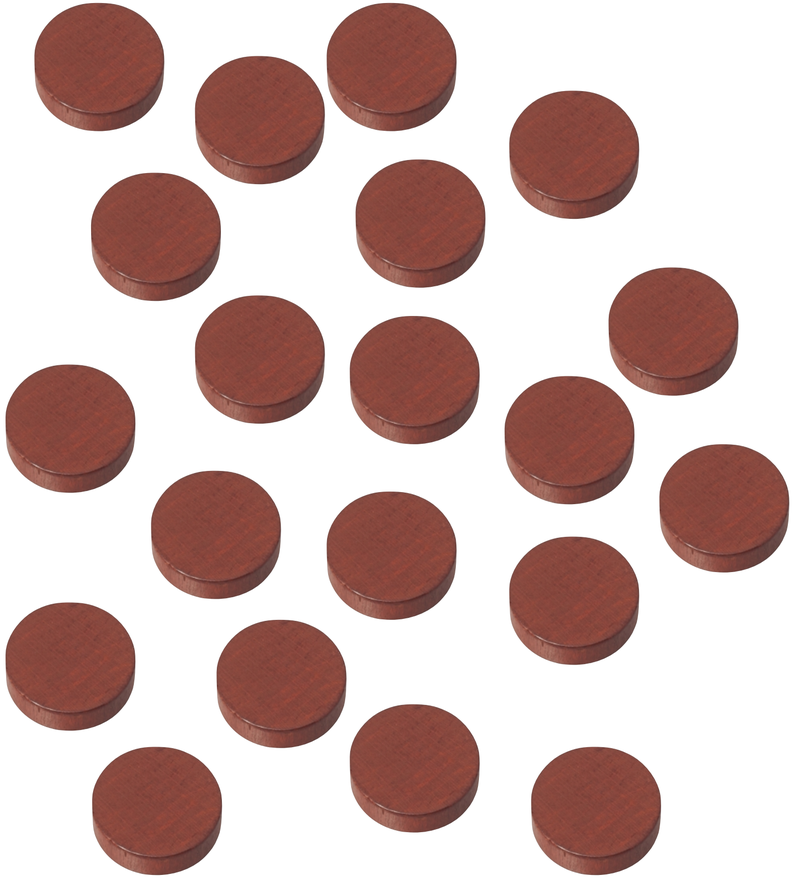
Lukas Baumanns[1] & Anna Schreck[2]

[1]Pädagogische Hochschule Freiburg, [2]Universität zu Köln

Jetzt sind Sie dran!

Ändern Sie die Regeln des folgenden NIM-Spiels

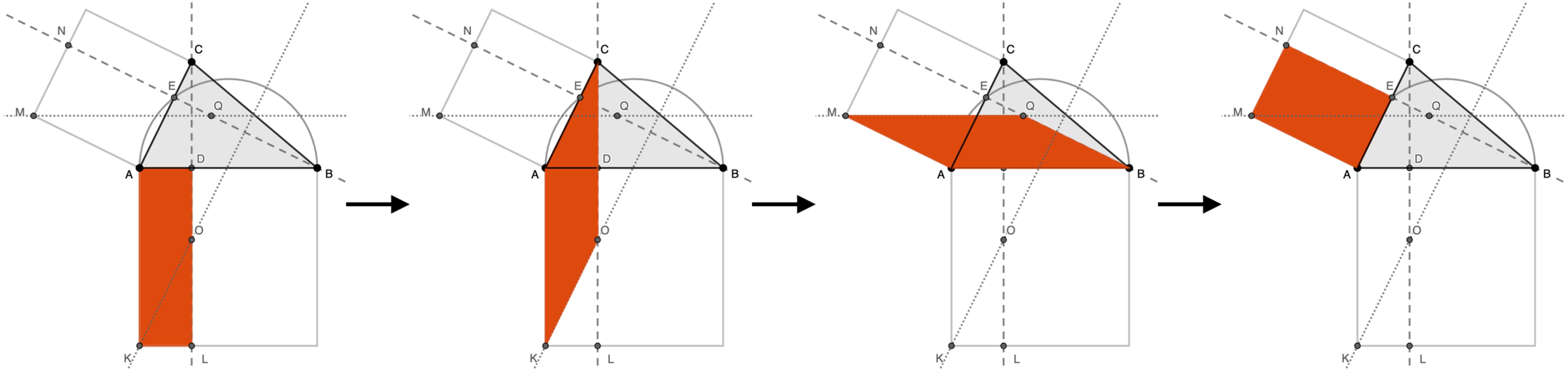
Aktivität



NIM-Spiel

Auf dem Tisch liegen 20 Spielsteine. Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd einen oder zwei Steine weg. Es gewinnt, wer den letzten Zug macht. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?

Theorie

Projektionssatz

Beweis